Working Papers

Technische Hochschule Ingolstadt

Zukunft in Bewegung

Technische Hochschule Ingolstadt

Working Paper

Heft Nr. 47 aus der Reihe
„**Arbeitsberichte – Working Papers**“

ISSN 1612-6483
Ingolstadt, im August 2019

Prof. Dr. Stefan May

Arithmetische und geometrische versus diskrete und stetige Renditen

Abstract

Vor allem im Rahmen angewandter Finanzmarktforschung gibt es immer wieder Missverständnisse hinsichtlich der Interpretation arithmetischer und geometrischer Durchschnitts-renditen. Insbesondere wenn es um Langfristprojektionen zukünftiger Wertentwicklungen geht – wie sie beispielsweise für Altersvorsorgekonzepte benötigt werden-, herrscht Unsicherheit darüber, welche von beiden Renditekonzeptionen dabei zugrunde gelegt werden sollte. Der folgende Beitrag stellt die relevanten Zusammenhänge dar und rückt sie in ihren richtigen Kontext.

Arithmetische und geometrische versus diskrete und stetige Renditen

von

Prof. Dr. Stefan May

Inhalt

1 Diskrete Wertentwicklungen: arithmetische und geometrische Durchschnittswerte

Gegeben sei eine Zeitreihe von Vermögenswerten[1] $(V_0;\ V_1;\ V_2; \ldots\ldots;\ V_N)$ sowie die entsprechenden Renditewerte[2] $(R_1;\ R_2; \ldots\ldots;\ R_N)$. Die durchschnittlichen arithmetischen und geometrischen Renditen errechnen sich wie folgt:

$$(1)\ \bar{R}_{arith} = \frac{1}{N}(R_1 + R_2 + \cdots + R_N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} R_t$$

$$(2)\ \bar{R}_{geom} = [(1+R_1)(1+R_2)\ldots\ (1+R_N)]^{\frac{1}{N}} - 1 = \left[\prod_{t=1}^{N}(1+R_t)\right]^{\frac{1}{N}} - 1$$

Grundsätzlich gilt $\bar{R}_{geom} \leq \bar{R}_{arith}$. Sind die Renditen in allen Perioden dieselben, gilt $\bar{R}_{geom} = \bar{R}_{arith}$. Bei unterschiedlichen Renditen in den diversen Perioden gilt die strenge Ungleichheit: $\bar{R}_{geom} < \bar{R}_{arith}$.

Um den Unterschied zwischen beiden Renditekonzeptionen[3] zu verdeutlichen, betrachte man folgendes Beispiel.

Beispiel 1: *Für das Wertpapierdepot eines Kunden, dessen Startwert 100.000 € beträgt, liegt die folgende historische Wert- und Renditeentwicklung vor:*

Jahr	0	1	2	3	4
Vermögenswert	€ 100,000	€ 120,000	€ 84,000	€ 109,200	€ 87,360
Jahresrendite		20%	-30%	30%	-20%

Berechnen wir hieraus die durchschnittliche arithmetische Rendite, ergibt sich gemäß Formel (1) ein Wert von 0 %:

[(20 %) + (-30 %) + (30 %) + (-20 %)] /4 = 0 %.

[1] Bei den Vs kann es sich beispielsweise um die täglich festgestellten Kurse einer Aktie handeln, um die Nettoinventarwerte eines Publikumsfonds oder aber um die Monats- oder Wochenendstände eines Aktienindexes.

[2] Die entsprechenden Renditen, d.h. prozentualen Veränderungen pro Periode ergeben sich durch: $R_t = \frac{V_t}{V_{t-1}} - 1$.

[3] Leser, welche über den Exponenten $\frac{1}{N}$ in (2) rätseln, seien an den mathematischen Zusammenhang $x^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{x}$ erinnert. Durch das Ziehen der N-ten Wurzel bzw. durch das Exponieren mit $\frac{1}{N}$ errechnet sich von einem Produkt mit N unterschiedlichen Faktoren der entsprechende Durchschnitt. Exponieren mit $\frac{1}{N}$ spielt daher bei geometrischen Durchschnitten die gleiche Rolle, wie die Multiplikation mit $\frac{1}{N}$ beim arithmetischen Mittel.

Dieses Ergebnis ist offensichtlicher Unfug, denn der Kunde hat in den vier Jahren immerhin 12.640 €, d.h. 12,64 % seines Vermögens verloren. Dem wird die geometrische Durchschnittsrendite gerecht. Gemäß (2) beträgt sie - 3,32 %:

*[1,20*0,70*1,30*0,80] ^ (1/4) -1 = -3,3219 %*

Dass dieser Wert tatsächlich die korrekte durchschnittliche Rendite des Beispiels repräsentiert, erkennt man, wenn man ermittelt, wie das Vermögen Jahr für Jahr um 3,3219 % abnimmt und welches Vermögen nach vier Jahren zur Verfügung steht:

100.000€(1-0,033219)^4 = 100.000€*0,966781)^4 = 87.359,96€.*

Dieser Wert entspricht - von einer kleinen Rundungsdifferenz abgesehen - genau dem Vermögensendwert in der Tabelle.

Der Grund für den Unterschied zwischen arithmetischer und geometrischer Durchschnittsrendite bei volatiler Renditeentwicklung ist darin zu sehen, dass beispielsweise nach einem Minus von 30 % in einem Jahr im Folgejahr mehr als 30 % Zuwachs benötigt werden, um wieder auf den alten Stand zu kommen. Volatilität in der Renditeentwicklung kann daher einen abnehmenden Vermögenswert bewirken, selbst wenn die arithmetische Rendite 0 % beträgt oder sogar leicht positiv ist. Genau dies wird durch unser Beispiel deutlich gemacht. Als erstes Zwischenfazit können wir daher festhalten:

Die durchschnittliche Rendite einer volatilen historischen Entwicklung muss immer als geometrische Rendite berechnet werden, wenn sie die tatsächliche Entwicklung korrekt widerspiegeln soll.

Sheppard'sche Korrektur

Die Tatsache, dass die geometrische Durchschnittrendite einer volatilen Renditeentwicklung geringer ist als die arithmetische Rendite kann wie folgt interpretiert werden: Die Volatilität richtet gewissermaßen einen „Schaden" an, welcher bei der geometrischen Renditeberechnung berücksichtigt wird und bei der arithmetischen nicht. Dieser Schaden ist umso größer, je volatiler die Renditeentwicklung ist.

Wird die Volatilität mit der statistischen Kennzahl Standardabweichung σ gemessen - was üblich ist - dann kann der Volatilitätsschaden sogar quantifiziert werden: Er beträgt die Hälfte der quadrierten Standardabweichung.

(3) Volatilitätsschaden $\approx \frac{1}{2}\sigma^2$

Zwischen geometrischer und arithmetischer Durchschnittsrendite besteht daher der folgende approximative Zusammenhang:

(4) $\bar{R}_{arith} \approx \bar{R}_{geom} + \frac{1}{2}\sigma^2$

Mittels (4) kann also eine vorgegebene arithmetische in eine geometrische Rendite umgerechnet werden und umgekehrt.

Beispiel 2: *Die arithmetische Durchschnittrendite einer Anlage betrage 7 % und die Standardabweichung der Renditeentwicklung 15 %. Dann gilt:* $\bar{R}_{geom} = 0{,}07 - \frac{1}{2}0{,}15^2 = 0{,}07 - 0{,}01125 = 0{,}05875 = 5{,}88$ %.

Wie erstaunlich exakt die Approximation (3) bzw. (4) tatsächlich funktioniert, wird deutlich, wenn wir sie auf unser Beispiel 1 anwenden.

Beispiel 3: *Die Standardabweichung σ der Renditeentwicklung aus Beispiel 1 errechnet sich wie folgt:*

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}}\ [0{,}2^2 + (-0{,}3)^2 +\ 0{,}3^2 + (-0{,}2)^2] = 0{,}2549$$

Damit errechnet sich gemäß (3) ein Volatilitätsschaden von $0{,}2549^2/2 = 0{,}065/2 = 0{,}0325 = 3{,}25\%$. Der tatsächliche Volatilitätsschaden aus Beispiel 1, d.h. der Unterschied zwischen geometrischer und arithmetischer Rendite beträgt dagegen 3,32 %; keine schlechte Approximation. [4]

2 Stetige Wertentwicklungen

Den Berechnungen sogenannter „stetiger" Wertentwicklungen und Renditen liegt die Annahme zugrunde, dass die Anzahl der Zinsperioden gegen Unendlich tendiert. Trotz dieser zunächst absurd anmutenden Vorstellung spielen stetige Rendite in der Praxis eine sehr große Rolle - aus Gründen, die in diesem Abschnitt deutlich werden sollten.

Diskrete versus stetige Vermögensveränderungen

Die Berechnung zukünftiger Vermögenswerte erfolgt üblicherweise mit der bekannten Zinseszinsformel:

(5) $V_T = V_0(1 + \frac{R}{n})^{Tn}$

Hierbei bezeichnet V_0 das Anfangsvermögen, *R* die Verzinsung p.a., *T* die Anzahl an Jahren, die das Anfangsvermögen angelegt wird und *n* die Anzahl der Zinszahlungen[5] pro Jahr. *Tn* entspricht daher der Anzahl an Zinsperioden und $\frac{R}{n}$ der Verzinsung pro Zinsperiode.

[4] Man beachte, dass in diesem Beispiel der Volatilitätsschaden der geometrischen durchschnittlichen Rendite entspricht, da die arithmetische Durchschnittsrendite des Beispiels 0 ist.

[5] Wenn von „Anzahl der Zinszahlungen" pro Jahr die Rede ist, dann ist dies nicht unbedingt wörtlich in dem Sinne zu nehmen, dass tatsächlich Zahlungen (z.B. Kupons) ausgeschüttet werden. Der entscheidende Punkt ist stattdessen, wie oft pro Jahr eine Wertveränderung stattfindet, so dass die unterstellte Wachstumsrate des Vermögens (die Verzinsung) an einer veränderten Basis ansetzen kann. So muss beispielsweise auch bei einem thesaurierenden Investmentfonds, dessen Rendite berechnet werden soll, die „Zinszahlungshäufigkeit" pro Jahr mit 360 angesetzt werden, da täglich ein neuer NAV (= „net asset value") des Fonds errechnet wird.

Erhöht man nun die Anzahl der Zinsperioden *n* immer weiter, dann wird der Ausdruck (5) nicht unbegrenzt größer - was man auf den ersten Blick vielleicht vermuten könnte -, sondern er strebt (für $n \to \infty$) gegen einen festen Wert:

$$V_0\left(1+\frac{R}{n}\right)^{Tn} \to V_0 e^{RT}$$

e steht dabei für die sogenannte Eulerzahl (e≈2,71828182 …), mit deren Hilfe kontinuierliche Wachstumsprozesse von Populationen beschrieben werden. [6]

Zukünftige Vermögenswerte lassen sich daher unter der Annahme n → ∞ wie folgt berechnen:

(6) $V_T = V_0 e^{RT}$

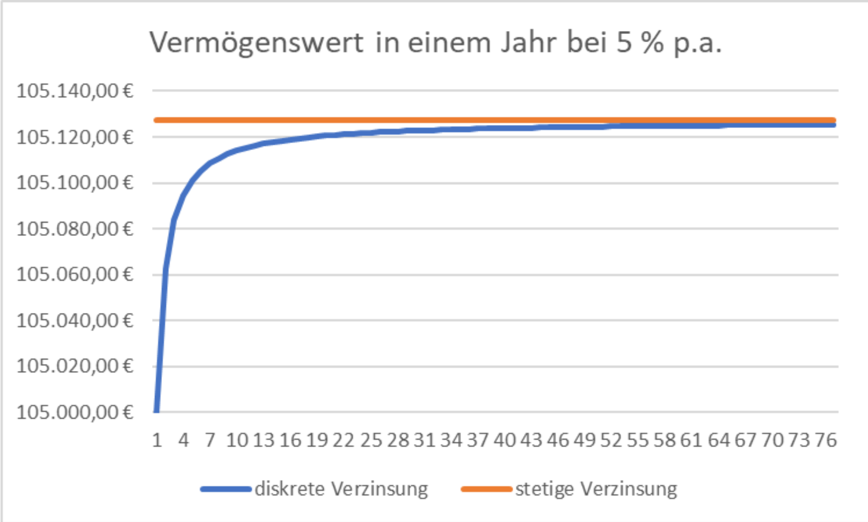
Wird mit (6) gerechnet, spricht man von einer stetigen Verzinsung, wogegen man bei Berechnungen gemäß (5) von einer diskreten Verzinsung spricht.[7] Obwohl die Annahme einer stetigen Verzinsung, d.h. einer unendlichen Anzahl an Vermögensänderungen pro Jahr (=Zinsperioden) zunächst völlig absurd anmutet, kann man zeigen, dass Vermögenswerte, welche unter dieser Annahme ermittelt werden, den Vermögenswerten sehr nahekommen, die sich ergeben, wenn man entsprechend (5) mit wöchentlichen (n=52) oder gar täglichen (n=365) Vermögenswertänderungen rechnen würde. Dies wird durch folgende Grafik deutlich:

---

[6] Konkret entspricht die Eulerzahl *e = 2,71828182(…)* dem Wert, den eine Population von 1 nach einer Periode erreicht hat, wenn sie sich in jeder von *n* Teilperioden anteilig verdoppelt, d.h. wenn die (stetige) Wachstumsrate 100% beträgt und wenn n→ ∞ gilt. „Anteilig verdoppeln" meint, dass z.B. bei 4 Teilperioden der Zuwachs in jeder der vier Perioden 1/4 = 25 % beträgt und bei n Teilperioden 1/n. Als Beispiel wählen wir die Entwicklung einer Population (Startwert = 1) über ein Jahr mit 4 Teilperioden: Periode 0 : 1, Periode 1: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^1 = 1{,}25^1 =$ 1,25; Periode 2: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 =$ $1{,}25^2$=1,5625; Periode 3: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = 1{,}25^3 =$ 1,953125; Periode 4: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$=$1{,}25^4$=2,44140625.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sich dieser Wert, der für *n*=4, d.h. bei vier Teilperioden „nur" 2,4414062 beträgt, mit jeder Erhöhung von *n* immer weiter dem Wert *e = 2,71828182(…)* annähert. Tatsächlich ist e genau so definiert: $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

[7] Es ist bemerkenswert, dass n → ∞ bewirkt, dass *n* aus Formel (6) vollständig verschwindet und man sich daher über Zinszahlungs- bzw. Vermögensänderungshäufigkeiten keine Gedanken mehr zu machen braucht. Dies dürfte einer der Gründe sein, warum die stetige Zinskonvention in der Praxis so verbreitet ist.



Die Grafik zeigt für eine unterstellte Verzinsung von 5 % p.a., wie sich - bei 100.000 € Startvermögen - die in einem Jahr vorliegenden Vermögenswerte mit steigender Anzahl an Zinsperioden immer mehr dem Wert annähern, der sich bei stetiger Verzinsung ergibt.

Die folgende Tabelle stellt einige konkrete Zahlenwerte aus obiger Grafik dar.

Zinsperioden	1	12	52	365	stetige Verzinsung
Vermögenswert	105.000,00 €	105.116,19 €	105.124,58 €	105.126,75 €	**105.127,11 €**

Man beachte insbesondere, dass sich die Werte, die für n=365, d.h. für eine tägliche Wertänderung gerechnet wurden, nur in sehr geringem Maße von denen unterscheiden, für die $n \rightarrow \infty$, d.h. eine stetige Verzinsung gilt. Es lässt sich daher festhalten:

Wenn eine tägliche Wertfeststellung erfolgt, dann unterscheiden sich Vermögenswerte, die auf der Grundlage stetiger Verzinsung mit Formel (6) berechnet werden, nur marginal von den entsprechenden diskret mit (5) kalkulierten Werten.

Da für die meisten Anlageformen eine tägliche Wertfeststellung üblich ist, werden in der Praxis die entsprechenden Renditen in der Regel unter der Annahme stetiger Verzinsung, d.h. mit (6) ermittelt.

Ermittlung diskreter und stetiger Durchschnittsrenditen $\bar{R}$ bzw. $\bar{r}$

Aus (5) und (6) lassen sich - für vorliegende Vermögenswerte V_0 und V_T - entsprechende Formeln für durchschnittliche diskrete und stetige Renditen $\bar{R}$ und $\bar{r}$ ableiten.[8]

(7) $\bar{R} = \left[\left(\frac{V_T}{V_0}\right)^{\frac{1}{Tn}} - 1 \right] n$

(8) $\bar{r} = \frac{1}{T}[ln(V_T) - ln(V_0)]$

Beispiel 4: Wir betrachten ein Startvermögen von 50.000 € und ein nach 7 Jahren vorliegendes Endvermögen von 100.000 €. Die diskreten (n=12) und stetigen Durchschnittsrenditen errechnen sich dann wie folgt:

$$\bar{R} = \left[\left(\frac{100.000}{50.000}\right)^{\frac{1}{7*12}} - 1 \right] 12 = 0{,}0994 = 9{,}94\ \%$$

$$\bar{r} = \frac{\ln(100.000) - \ln(50.000)}{7} = 0{,}0990 = 9{,}90\ \%$$

[8] Für Leser, die es genau wissen wollen, hier die exakte Ableitung: Wir bezeichnen in (5) die diskrete Durchschnittsrendite mit $\bar{R}$ und in (6) die stetige Durchschnittsrendite mit $\bar{r}$ und lösen nach $\bar{R}$ *bzw.* $\bar{r}$ auf. Beginnen wir mit der diskreten Rendite, d.h. Gleichung (5):

$V_T = V_0(1 + \frac{\bar{R}}{n})^{Tn} \Leftrightarrow \frac{V_T}{V_0} = (1 + \frac{\bar{R}}{n})^{Tn} \Leftrightarrow \sqrt[Tn]{\frac{V_T}{V_0}} = \left(1 + \frac{\bar{R}}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{R}}{n} = \sqrt[Tn]{\frac{V_T}{V_0}} - 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{R}}{n} = \left(\frac{V_T}{V_0}\right)^{\frac{1}{Tn}} - 1 \quad \Leftrightarrow \bar{R} = \left[\left(\frac{V_T}{V_0}\right)^{\frac{1}{Tn}} - 1\right] n.$

Und nun die stetige Rendite, d.h. Gleichung (6):

$$V_T = V_0 e^{\bar{r}T} \Leftrightarrow \frac{V_T}{V_0} = e^{\bar{r}T} \Leftrightarrow ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right) = ln(e^{\bar{r}T}) \Leftrightarrow ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right) = \bar{r}T \Leftrightarrow ln(V_T) - ln(V_0) = \bar{r}T$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T}[[ln(V_T) - ln(V_0)]] = \bar{r}$$

Zusammenhang zwischen diskreter und stetiger Durchschnittsrendite

Durch Kombination von (5) und (6) lässt sich eine vorliegende durchschnittliche diskrete in die entsprechende stetige Rendite umwandeln und umgekehrt. Die entsprechenden Formeln lauten:[9]

(9) $\bar{r} = \ln[(1 + \frac{\bar{R}}{n})^n]$

(10) $\bar{R} = [e^{\frac{\bar{r}}{n}} - 1]n$

> ***Beispiel 5:*** *Die arithmetische Durchschnittsrendite betrage 8 % und die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr 5. Dann lässt sie sich mit (9) in eine vergleichbare stetige Durchschnittrendite umrechnen:* $\bar{r} = ln[(1 + \frac{0{,}08}{5})^5]$ *= 0,0793667 = 7,94 %. Umgekehrt kann mit (10) die stetige Rendite von 7,94 % in die entsprechende diskrete Rendite gewandelt werden:* $\bar{R} = \left[e^{\frac{0{,}0794}{5}} - 1\right] * 5$ *= 0,0800 = 8 %*

Arithmetisches Mittel einer Reihe unterschiedlicher stetiger Renditen

In Gleichung (8) hatten wir die stetige Durchschnittsrendite $\bar{r}$ aus vorliegenden Start- und Endwerten ermittelt und dabei ein konstantes stetiges Vermögenswachstum entsprechend Gleichung (6) unterstellt. $\bar{r}$ lässt sich aber auch aus einer Reihe unterschiedlicher stetiger Periodenrenditen $(r_1;\ r_2; \ldots;\ r_T)$ ermitteln.

Hierzu betrachte man folgenden Zusammenhang zwischen der gesamten prozentualen Wertentwicklung und den Entwicklungen in den einzelnen Perioden:

---

[9] Auch für (9) und (10) liefern wir für diejenigen, die es ganz genau wissen wollen, die exakte Herleitung: Wieder bezeichnen wir in (5) die diskrete Durchschnittsrendite mit $\bar{R}$ und in (6) die stetige Durchschnittsrendite mit $\bar{r}$, und setzen die jeweiligen rechten Seiten von (5) und (6) gleich: $V_0(1 + \frac{\bar{R}}{n})^{Tn} = V_0 e^{\bar{r}T}$. Löst man nun diese Gleichung nach $\bar{R}$ bzw. $\bar{r}$ auf, so erhalten wir die entsprechenden Umrechnungsformeln:

Auflösung nach $\bar{r}$:

$$V_0\left(1 + \frac{\bar{R}}{n}\right)^{Tn} = V_0 e^{\bar{r}T} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\bar{R}}{n}\right)^n = e^{\bar{r}} \Leftrightarrow \ln[(1 + \frac{\bar{R}}{n})^n] = \ln[e^{\bar{r}}] \Leftrightarrow \ln[(1 + \frac{\bar{R}}{n})^n] = \bar{r}.$$

Auflösung nach $\bar{R}$:

$$(1 + \frac{\bar{R}}{n})^n = e^{\bar{r}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{(1 + \frac{\bar{R}}{n})^n} = \sqrt[n]{e^{\bar{r}}} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\bar{R}}{n}\right) = \sqrt[n]{e^{\bar{r}}} \Leftrightarrow \frac{\bar{R}}{n} = \sqrt[n]{e^{\bar{r}}}\text{-}1 \Leftrightarrow \bar{R} = (\sqrt[n]{e^{\bar{r}}} - 1)n \Leftrightarrow \bar{R} = [(e^{\bar{r}})^{\frac{1}{n}} - 1]n \Leftrightarrow \bar{R} = [e^{\frac{\bar{r}}{n}} - 1]n.$$

(11) $\frac{V_T}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} * \frac{V_2}{V_1} * \dots * \frac{V_T}{V_{T-1}}$

Wenn wir nun unterstellen, dass sich die Wertentwicklungen in den einzelnen Perioden stetig entsprechend Gleichung (6) vollziehen und wir die entsprechenden stetigen Verzinsungen in den einzelnen Perioden mit r_t bezeichnen *(t= 1; …; T)*, kann (11) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\frac{V_T}{V_0} = \frac{V_0 e^{r_1}}{V_0} * \frac{V_1 e^{r_2}}{V_1} * \dots * \frac{V_{T-1} e^{r_T}}{V_{T-1}} = e^{r_1} * e^{r_2} * \dots * e^{r_T}$$

$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right) = ln(e^{r_1} * e^{r_2} * \dots * e^{r_T})$$

$$\Leftrightarrow ln(V_T) - ln(V_0) = ln(e^{r_1}) + \ln(e^{r_2}) + \cdots + \ln(e^{r_T})$$

$$\Leftrightarrow ln(V_T) - ln(V_0) = r_1 + r_2 + \cdots + r_T$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T}[ln(V_T) - ln(V_0)] = \frac{1}{T}(r_1 + r_2 + \cdots + r_T)$$

Anhand Gleichung (8) erkennt man, dass die linke Seite des obenstehenden Ausdrucks aber genau der stetigen Durchschnittsrendite $\bar{r}$ entspricht. Somit gilt:

(12) $\bar{r} = \frac{1}{T}(r_1 + r_2 + \cdots + r_T)$

Die stetige Durchschnittsrendite $\bar{r}$ ergibt sich daher als einfaches arithmetisches Mittel der stetigen Periodenrenditen. Zugleich entspricht sie approximativ der geometrischen Durchschnittsrendite.

Beispiel 6: Wir greifen unser Beispiel 1 auf und berechnen für jede Periode zusätzlich zu den arithmetischen Jahresrenditen die entsprechenden stetigen Werte entsprechend Formel (8): r_1 = ln(120.000)-ln(100.000) = 0,182322 = 18,23 %; r_2 = ln(84.000)-ln(120.000) = -0,356675 = -35,67 %; r_3 = ln(109.200) - ln(84.000) = 0,262364 = 26,24 %; r_4 = ln(87.360)-ln(109.200) = - 0,223144 = - 22,31 %.

Jahr	0	1	2	3	4
Vermögenswert	€ 100.000	€ 120.000,00	€ 84.000,00	€ 109.200,00	€ 87.360,00
Diskrete Jahresrendite		20,00%	-30,00%	30,00%	-20,00%
Stetige Jahresrendite		18,23%	-35,67%	26,24%	-22,31%

Bilden wir daraus das arithmetische Mittel, erhalten wir: [18,23 % +(-35,67 %) + 26,24 % +(-22,31 %)] /4 = - 3,38 %. Dieser Wert entspricht exakt der gemäß (8) ermittelten Durchschnittsrendite über alle vier Perioden: $\frac{1}{4}$ [ln(87.360)-ln(100.000)] = - 0,033783 = -3,38 %.

Zugleich kommt dieser Wert dem geometrischen Mittelwert von -3,32 % der diskreten Periodenrenditen aus Beispiel 1 sehr nahe.

Im Gegensatz zum arithmetischen Mittel diskreter Periodenrenditen wird beim arithmetischen Mittel stetiger Periodenrenditen der negative Effekt einer positiven Volatilität auf die Durchschnittsrendite berücksichtigt. Das arithmetische Mittel stetiger Periodenrenditen liefert daher genau wie das geometrische Mittel diskreter Periodenrenditen ein zutreffendes Bild der tatsächlichen Entwicklung. Es lässt sich daher festhalten:

Um den Durchschnitt einer volatilen historischen Renditeentwicklung korrekt zu beschreiben, gibt es zwei Möglichkeiten:

- ***geometrisches Mittel diskreter Periodenrenditen.***
- ***arithmetisches Mittel stetiger Periodenrenditen.***

3 Zu erwartende zukünftige Entwicklungen

In den letzten beiden Abschnitten wurden historische Wertentwicklungen thematisiert, insbesondere, wie sich solche Entwicklungen korrekt durch die entsprechenden durchschnittlichen prozentualen Wertentwicklungen - sprich Renditen - repräsentieren lassen.

In diesem Abschnitt vollziehen wir nun einen vollständigen Perspektivwechsel. Statt mit Historien wollen wir uns mit der Zukunft, d.h. mit prospektiven Wertentwicklungen und Renditen befassen. Wenn daher im Folgenden Vermögensentwicklungen mit $(V_0;\ \tilde{V}_1;\ \tilde{V}_2; \ldots\ldots;\ \tilde{V}_T)$ bzw. die entsprechenden Renditewerte mit $(\tilde{R}_1;\ \tilde{R}_2; \ldots\ldots;\ \tilde{R}_T)$ bezeichnet werden, so sind diese Sequenzen völlig anders zu interpretieren als in den letzten beiden Abschnitten: Nun handelt es sich (mit Ausnahmen von V_0, das den aktuellen Vermögenswert bezeichnet) um zukünftige Werte, die zum Berechnungs- bzw. Analysezeitpunkt (noch) unbekannt sind, d.h. es handelt sich um stochastische Größen[10] , über die lediglich statistische Aussagen möglich sind.

Um nun statistische Aussagen über zu erwartende Wertentwicklungen und Renditen treffen zu können, benötigen wir eine Vorstellung davon, welcher Zufallsdynamik die Renditen in den einzelnen Perioden unterworfen sind. M.a.W., wir benötigen ein stochastisches Modell, welches

[10] Um stets eine klare Unterscheidung zwischen Zufallsvariablen und festen Werten („Parametern") sicherzustellen, werden Zufallsvariablen im Folgenden mit einem Schlangenzeichen versehen. $\tilde{V}_2$ bezeichnet daher beispielsweise den zum Analysezeitpunkt $t=0$ noch unbekannten, gewissermaßen „virtuellen" Vermögenswert in Periode 2. Dies ist eine unter Statistikern sehr verbreitete Konvention.

$(\tilde{V}_1;\ \tilde{V}_2; \ldots\ldots;\ \tilde{V}_T)$ „erzeugt". Hierzu unterstellen wir, dass sich das Vermögen in jeder Periode entsprechend einer sogenannten geometrischen Brown´schen Bewegung entwickelt:

(13) $d\tilde{V} = \mu V dt + \sigma V d\widetilde{W}$ mit $d\widetilde{W} \sim N(0; 1)$

(13) Stellt man sich am besten als eine Art Mechanismus vor, der in jeder Periode dt – ausgehend von einem bestimmten Vermögenswert V der Vorperiode – einen zu erwartenden Zuwachs des Vermögenswertes in Höhe von μV „erzeugt", d.h. in Höhe eines bestimmten Prozentsatzes μ von V. Die zu erwartende Vermögensentwicklung wird allerdings überlagert von einem Standard-normalverteilten stochastischen Einfluss $d\widetilde{W}$, dessen Realisierung durch das σ-fache von V verstärkt (oder gedämpft) wird. [11] μV wird daher manchmal als „Drift" des Prozesses (13) bezeichnet und $\sigma V d\widetilde{W}$ als seine Volatilität.

Verteilung diskreter Renditen

Der geometrische Prozess (13) bewirkt, dass die (diskrete) Rendite $\frac{d\tilde{V}}{\tilde{V}} := \tilde{R}$ einer arithmetischen Brown´schen Bewegung „gehorcht":

(14) $\tilde{R} = \mu dt + \sigma d\widetilde{W}$ mit $d\widetilde{W} \sim N(0; 1)$

Gleichungen (13) und (14) beschreiben einen sogenannten „Random Walk". Dabei ergibt sich die diskrete stochastische Rendite $\tilde{R}$ in jeder Periode *dt* auf Grundlage einer Normalverteilung mit dem konstanten Erwartungswert μ und der konstanten Varianz σ^2. Symbolisch wird dies wie folgt ausgedrückt:

(15) $\tilde{R} \sim N(\mu; \sigma^2)$

[11] Ein Beispiel dazu: Die Zeiteinheit *dt* betrage einen Monat. Weiter gelte: *V = 280€*, μ = 0,75 %, σ = 6,5 %. Gemäß Erwartungswert μV müsste der Kurs im betrachteten Monat um 0,0075*280€ = 2,10€ steigen. Nun konkretisiere sich aber leider ein negativer stochastischer Einfluss, d.h. die Standard-normalverteilte Zufallsvariable realisiere sich mit einem negativen Wert: $d\widetilde{W} \rightarrow$ - 0,9. Dies bewirkt, dass die zu erwartende Entwicklung von +2,10€ durch eine negative Kursbewegung in Höhe von 0,065*280*(-0,9)=-16,38€ „überlagert" wird. Insgesamt fällt der Kurs daher um 14,28€: $d\tilde{V} \rightarrow$ 280€*0,0075+0,065*280€*(-0,9) = -14,28€.

Die diskreten Renditen in den diversen Perioden können wir uns als unabhängige Realisierungen („Ziehungen") einer normalverteilten Zufallsvariable vorstellen. Da die Renditen in den einzelnen Perioden immer aus der gleichen Normalverteilung „gezogen" werden, sind zeitlich aufeinander folgende Renditewerte unabhängig voneinander: Die Wahrscheinlichkeit in der laufenden Periode einen bestimmten Renditewert zu erhalten wird in keinster Weise davon beeinflusst, welche Rendite sich in der Vorperiode realisiert hat. Dieses besondere Merkmal der entsprechenden Zeitreihe wird als Markov-Eigenschaft bezeichnet – die Eigenheit einer Zeitreihe „ohne Gedächtnis". [12]

Verteilung stetiger Renditen

Aus dem Prozess (13) lässt sich folgender Zusammenhang ableiten: [13]

$$(16)\quad dln(\tilde{V}) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma d\widetilde{W}$$

$dln(\tilde{V})$ ist aber nichts anderes, als die Veränderung des Logarithmus des Kurswertes über einen bestimmten Zeitraum hinweg. Beträgt dieser Zeitraum t Perioden, gilt also $dln(\tilde{V}) = ln(\tilde{V}_t) - ln(V_0)$, dann gilt:

$$(17)\quad ln(\tilde{V}_t) - ln(V_0) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma^2 t\right]$$

Die linke Seite von (17) entspricht genau der sich im Zeitraum von 0 bis t ergebenden stetigen Rendite: $ln(\tilde{V}_t) - ln(\tilde{V}_0) = ln\left(\frac{\tilde{V}_t}{V_0}\right) := \tilde{r}_t$

(17) kann daher umgeschrieben werden zu:

$$(18)\quad \tilde{r}_t \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma^2 t\right]$$

---

[12] Man stelle sich einen Spaziergänger vor, der sein Gedächtnis vollständig verloren hat, auch sein Kurzzeitgedächtnis. Jeder Schritt dieses Spaziergängers ist völlig unabhängig von irgendwelchen vorherigen Schritten, da er diese ja komplett vergessen hat. Der Spaziergang wird daher zu einem „Random Walk".

[13] Warum und wie genau sich (16) aus (13) ergibt kann in vorliegender Ausarbeitung nicht gezeigt werden, denn eine genaue Herleitung würde ihren Rahmen sprengen. Dabei wird ein bekanntes Ergebnis aus der Theorie stochastischer Differentialgleichungen („Itos Lemma") verwendet, welches in der Finanzmarkttheorie eine große Bedeutung hat. Der Übergang von (13) zu (16) ist daher im vorliegenden Text die einzige logische Schlussfolgerung, die auch ein geneigter und konzentrierter Leser nicht selbstständig nachvollziehen kann – es sein denn, er ist mit „Itos Lemma" vertraut.

Die stetige Rendite $\tilde{r}_t$ gehorcht einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$ und der Standardabweichung $\sqrt{\sigma^2 t} = \sigma\sqrt{t}$. Betrachtet man lediglich Veränderungen über eine Periode hinweg, d.h. t=1, dann gilt:

(19) $\tilde{r} \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right); \sigma^2\right]$

Entwickelt sich der Wert einer Anlage entsprechend einer geometrischen Brown´schen Bewegung [Gleichung (13)], dann sind die diskreten Renditen entsprechend (15) normalverteilt und die stetigen Renditen entsprechend (19). Die folgende Tabelle fasst die Ergebnisse zusammen:

	Erwartungswert	Standardabweichung
Diskrete Rendite $\tilde{R}$	μ	σ
Stetige Rendite $\tilde{r}$	$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$	σ

Für ein und denselben stochastischen Prozess [Gleichung (13)] beträgt die zu erwartende diskrete Rendite μ und die zu erwartende stetige Rendite $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$.

Zwischen den Erwartungswerten diskreter $E(\tilde{R})$ und entsprechender stetiger Renditen $E(\tilde{r})$ besteht daher derselbe Zusammenhang wie zwischen den Durchschnitten arithmetischer $\bar{R}_{arith}$ und geometrischer Renditen $\bar{R}_{geom}$ entsprechend Gleichung (4): Mittels Sheppard´scher Korrektur lassen sie sich gegenseitig umrechnen:

(20) $E(\tilde{R}) = E(\tilde{r}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \Leftrightarrow \mu = E(\tilde{r}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \Leftrightarrow E(\tilde{r}) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$

Erwartungswert, Median und Modus des in T vorliegenden Vermögenswertes $\tilde{V}_T$ bestimmen sich aufgrund der Eigenschaften der LogNormalverteilung[14] entsprechend folgender Formeln:

(21) $E(\tilde{V}_T) = V_0 e^{\left(E(\tilde{r}) + \frac{1}{2}\sigma^2\right) * T}$

(22) $Me(\tilde{V}_T) = V_0 e^{E(\tilde{r}) * T}$

[14] Vergleiche hierzu Aitchison, Brown (1957) als Standardreferenz zur LogNormalverteilung.

(23) $Mo(\tilde{V}_T) = V_0 e^{(E(\tilde{r})-\sigma^2)*T}$

4 Monte Carlo Simulationen

Die in den letzten beiden Abschnitten beschriebenen Zusammenhänge zwischen arithmetischen und geometrischen bzw. diskreten und stetigen Renditen sind vor allem relevant, wenn es darum geht, die Ergebnisse von Kursentwicklungen zu interpretieren, welche mittels Monte Carlo Simulationen „erzeugt“ wurden. Der Grund hierfür liegt darin, dass solche Simulationen zwar konstruktionsbedingt diskreter Natur sind, für die simulierten Vermögensentwicklungen aber sowohl diskrete als auch stetige Renditen ermittelt werden können.

Die genauen Zusammenhänge werden deutlich, wenn man sich die einzelnen Schritte einer Monte Carlo Simulation vor Augen führt.

Zunächst wird ein Startvermögens V_0 und ein Gesamtzeitraum (*T*) festgelegt sowie die Länge der Perioden (*dt*), deren prozentuale Wertentwicklungen simuliert werden sollen. [15]

Anschließend wird für jede Periode ein (diskreter) Renditewert entsprechend einer bestimmten Renditeverteilung „gezogen“. Die dabei am häufigsten verwendete Verteilung ist die Normalverteilung mit dem (diskreten) Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ [vgl. Gleichung (15)].[16]

Eine Abfolge einzelner konkreter Renditeziehungen für alle Perioden entspricht einer Iteration (= Szenario) der Simulation. Daher ist jede Iteration zugleich eine konkrete Sequenz diskreter Renditen $(R_1;\ R_2; \ldots; R_T)$,welche aufgrund des Zusammenhangs

(24) $V_t = (1 + R_t)V_{t-1} \qquad (t = 1; \ldots; T)$

wiederum eine Sequenz aus Vermögenswerten $(V_1;\ V_2; \ldots;\ V_T)$ „erzeugt“. Besteht eine Simulation aus *N* Iterationen (=Szenarien), dann lässt sich für eine Periode der Länge T der in T vorliegende durchschnittliche Vermögenswert $\bar{V}_T$ wie folgt ermittelt:

[15] In der Regel werden monatliche oder wöchentliche Kursveränderungen simuliert, manchmal aber auch die Entwicklungen einzelner Handelstage oder gar -stunden.

[16] Der stochastische Prozess (15) repräsentiert selbstverständlich nicht die einzige Möglichkeit, Vermögensentwicklungen zu simulieren. Sehr beliebt sind derzeit beispielsweise sogenannte GARCH-Prozesse, bei denen die Volatilität nicht als konstant angenommen wird, sondern sich im Verlauf einer Iteration verändern kann.

(25) $\bar{V}_T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_{T;i}$

$V_{T;i}$ bezeichnet hierbei den Vermögenswert des i-ten Szenarios in Periode T. Ermittelt man nun mittels dieser Simulation die durchschnittliche stetige Rendite[17] entsprechend $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{\frac{1}{T}\left[ln\left(\tilde{V}_{T;i}\right) - ln(V_0)\right]\}$ dann wird sich als Simulationsergebnis nicht μ herausstellen, sondern $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$:

(26) $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{\frac{1}{T}\left[ln\left(\tilde{V}_{T;i}\right) - ln(V_0)\right]\} = \bar{r} \approx E(\tilde{r}) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$

Es lässt sich daher festhalten*:* ***Selbst, wenn Kursbewegungen auf der Grundlage normalverteilter diskreter Renditen mit dem Erwartungswert μ simuliert werden, erhalten wir als durchschnittliche stetige Rendite nicht den Wert μ, sondern*** $\boldsymbol{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}$

Beispiel 7: *Die oben dargestellten Zusammenhänge zeigen sich auch im Rahmen einer Monte Carlo Simulation des Aktienmarktes über zehn Jahre hinweg. Hierbei werden monatliche Wertänderungen, also insgesamt 120 Monate simuliert. Wir unterstellen hierbei ein Startvermögen von 100.000 €, eine (diskrete) p.a. Rendite von 9 % sowie eine p.a.-Volatilität von 20 %. Dem entspricht eine diskrete Monatsrendite von* $1{,}09^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}7207\ \%$ *und eine Monatsvolatilität von* $\frac{0{,}20}{\sqrt{12}} = 0{,}057735 = 5{,}7735\ \%$*. Entsprechend der Sheppard´schen Korrektur (20) ergibt dies eine stetige Monatsrendite von* $0{,}007207 - \frac{1}{2}0{,}057735^2 = 0{,}005541 = 0{,}5541\ \%$*. Auf Grundlage dieser theoretischen Werte kann nun mittels Gleichung (21) ein Erwartungswert für den in 10 Jahren vorliegenden Vermögenswert ermittelt werden:*

$E\left(\tilde{V}_{120}\right) = 100.000e^{(0{,}005541+\frac{1}{2}0{,}057735^2)*120} = 237.471{,}82\ €$

Diese theoretischen Werte werden nun den Simulationsergebnissen gegenübergestellt. Hierzu wurden monatliche Wertänderungen über insgesamt 120 Monate hinweg entsprechend Gleichung (15) simuliert: $\tilde{R} \sim N(0{,}007207; 0{,}057735^2)$*. Als Ergebnis einer Simulation mit insge-*

[17] Oder alternativ das geometrische Mittel.

samt 500.000 Iterationsschritten (500.000 Zehn-Jahres Szenarien!) ergab sich ein durchschnittlicher Depotwert nach 10 Jahren von 236.744,67 € sowie durchschnittliche stetige und diskrete Jahresrenditen von 0,5530 % und 0,7207 %.

Die Ergebnisse entsprechen (abgesehen von dem auch bei 500.000 Iterationsschritten/Szenarien noch vorhandenen Standardfehler[18]) weitgehend den mit Gleichungen (20) und (21) errechneten theoretischen Werten. Die folgende Tabelle stellt theoretische und simulierte Werte gegenüber:

	Durchschnittswerte der Simulation	**Theoretische Werte**
	(500.000 Szenarien)	[entsprechend (20) und (21)]
Stetige Rendite pro Monat	0,5530 %	0,5541 %
diskrete Rendite pro Monat	0,7207 %	0,7207 %
Vermögenswert nach 10 Jahren	236,744.67 €	237,471.82 €

Die beschriebenen Zusammenhänge sind vor allem relevant, wenn Monte Carlo Simulationen auf der Grundlage durchschnittlicher historischer Renditen und Volatilitäten durchgeführt werden sollen. Als Erwartungswerte der zu simulierenden Renditen dürfen dann nicht die historisch ermittelten diskreten geometrischen (bzw. stetigen arithmetischen) Durchschnittswerte verwendet werden, sondern die entsprechend Gleichung (20) korrigierten Werte.

Beispiel 8: Gegeben sei eine Datenhistorie, auf deren Grundlage eine diskrete geometrische (alternativ: stetig arithmetische) Durchschnittsrendite von 7,50 % sowie eine Standardabweichung von 16 % ermittelt wurde. Will man nun diese Werte in einer Monte Carlo Simulation verwenden, dann darf man nicht auf der Grundlage einer Verteilung mit der einer zu erwartenden Rendite von 7,50 % simulieren. Stattdessen muss der historische Durchschnittswert von 7,50 % entsprechend Gleichung (20) korrigiert werden: $0{,}075 + \frac{0{,}16^2}{2} = 0{,}0878 = 8{,}78\,\%$. Um als durchschnittlichen Simulationswert 7,50 % zu erhaltenen, muss statt mit 7,50 % mit 8,78 % simuliert werden.

[18] Der Standardfehler ist eine Kennzahl dafür, wie groß das Potential ist, dass ein im Rahmen einer Stichprobe ermittelter Wert (und eine Simulation ist statistisch gesehen nichts anderes als eine Stichprobe) vom (in der Regel unbekannten) „wahren" Wert abweicht.

Literaturverzeichnis

Aitchison, J., Brown, J., 1957, The Lognormal Distribution, Cambridge University Press, Cambridge.

Hull, J.C., 2018, Option, Futures, and Other Derivatives, Pearson Education Limited.

Spremann, K. 2008, Portfoliomanagement, Oldenbourg Verlag, München.

Stuart, A. Ord, J.K., 1994, Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, Distribution Theory, 6th Edition, London: Edward Arnold--New York: John Wiley & Sons, 1994.

Technische Hochschule Ingolstadt

Working Paper

Heft Nr. 47 aus der Reihe
„Arbeitsberichte – Working Papers"

ISSN 1612-6483
Ingolstadt, im August 2019

Prof. Dr. Stefan May

Arbeitsberichte und geometrische versus diskrete und stetige Renditen

Impressum

Herausgeber
Der Präsident der Technischen Hochschule Ingolstadt
Esplanade 10, 85049 Ingolstadt
Telefon: +49 841 9348-0
Fax: +49 841 9348-2000
E-Mail: info@thi.de

Druck
Hausdruck

Internet
Alle Themen aus der Reihe „Arbeitsberichte – Working Papers", können Sie unter der Adresse www.thi.de nachlesen.